Referência Histórica

O erro de raciocínio.

D' Alembert (1717-1783)

foi um matemático e físico francês de quem se conta ter cometido um erro na resolução do seguinte problema: "Se lançarmos uma moeda ao ar duas vezes seguidas, qual é a probabilidade de obtermos pelo menos uma vez verso"?

D' Alembert respondeu que a probabilidade era 2 em 3 e justificou dizendo que havia três possibilidades: dois reversos, dois versos ou um reverso e um verso e só uma das possibilidades era desfavorável. D´ Alembert contou mal os casos possíveis e os favoráveis da experiência. Qual é a resposta que

D´ Alembert deveria ter dado?

Em geral

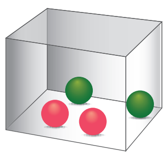
Quando queremos realizar k escolhas sucessivas em que na primeira há n_1 casos favoráveis, na segunda há n_2 casos favoráveis e assim sucessivamente.

Podemos afirmar que o número total de casos favoráveis é dado pelo produto dos casos de cada escolha.

$$n_1 \times n_2 \ldots \times n_k$$

Exemplo:

Uma urna contém quatro bolas como se mostra na figura duas vermelhas e duas verdes.



Considera a experiência aleatória que consiste em retirar sucessivamente, sem reposição, duas bolas e verificar as cores.

Qual é a probabilidade do acontecimento.

A: "A primeira bola é verde e a segunda vermelha"?

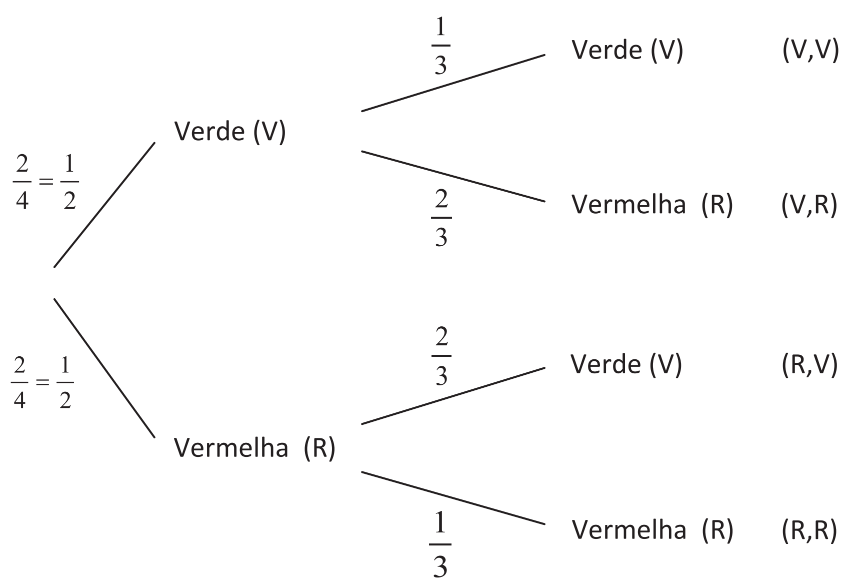
Considerando que : R: " Sair vermelha" e V: "Sair verde"

O espaço amostral é:

$$\Omega = \{ RV; RR; VR; VV\}$$

Queremos determinar os casos favoráveis e possíveis a acontecer VR

Vamos construir um diagrama de árvore e em cada ramo colocamos a probabilidade do acontecimento:



Então a probabilidade de acontecer VR

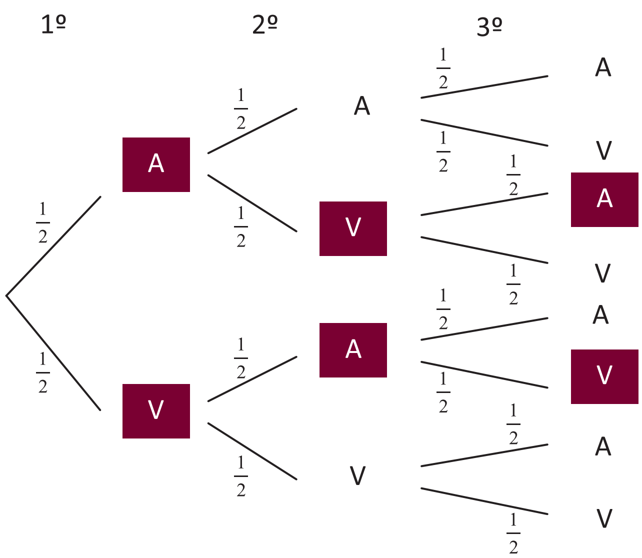
$$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Exemplo:

Ao lançar uma moeda três vezes, qual é a probabilidade de não obter a mesma face duas vezes consecutivas?

 (V)  (A)

Consideramos o acontecimento A: "não obter a mesma face duas vezes consecutivas. Temos que o acontecimento A é a reunião de dois acontecimentos elementares $A_1=\{AVA\}$ e $A_2=\{VAV\}$.



Assim temos

$$P(A_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Então

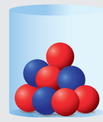
$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

Definição axiomática de probabilidade (caso finito)

A primeira definição formal foi concebida pelo matemático russo Andrey Kolmogorov, que em 1933 apresentou uma definição axiomática de probabilidade com base em três axiomas.

Tarefa 19

Observa a caixa representada a seguir.



Tirando uma bola da caixa. Qual é a probabilidade de sair:

a) Uma bola vermelha?

b) Uma bola azul?

c) Uma bola branca?

Tarefa 20

Um saco tem três bolas amarelas, 3 bolas verdes e 3 bolas brancas numeradas de 1 a 3 (em cada cor). Tira-se ao acaso uma bola do saco. Considera os acontecimentos:

A:" Sair bola amarela"

B:" Sair bola verde"

C:" Sair bola com o número 1"

Determina a probabilidade dos seguintes acontecimentos:

a) $A\cap B$

b) $A\cup B\cup C$

c) $(A\cup B)\setminus C$

d) $A\cup\overline{C}$

Tarefa 21

Um saco tem 4 bolas numeradas de 1 a 4. Extraem-se sucessivamente duas bolas e somam-se os pontos obtidos.

a) A probabilidade de a soma ser par é maior se a extração é feita com reposição ou sem reposição?

b) O que podes concluir da resposta da alínea anterior para o valor da probabilidade da soma ser ímpar.

Chama-se probabilidade a toda aplicação P de domínio Ω e conjunto de chegada $\mathbb{R}_0^+$ tal que, a todo acontecimento A é associado um número real maior ou igual que zero que se designa por probabilidade do acontecimento A.

$$P: \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$
$$\quad\quad A \longmapsto P(A)$$

Esta aplicação verifica os seguintes axiomas.

Axioma 1: A probabilidade do acontecimento certo é 1

$$P(\Omega) = 1$$

Axioma 2: A probabilidade de qualquer acontecimento A é não negativa

$$P(A) \geq 0$$

Axioma 3: Se A e B são acontecimentos incompatíveis, a probabilidade do acontecimento A reunião com B é a soma das probabilidades de A e de B.

$$Se \quad A \cap B = \varnothing \quad então \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Tarefa 22

Um saco tem bolas brancas e amarelas, indistinguíveis ao tato. Tirando uma bola ao acaso, a probabilidade de ser amarela é $\frac{1}{3}$.

Sabendo que no saco estão 12 bolas brancas, quantas bolas há, ao todo, no saco?

Para quaisquer acontecimentos A e B de um espaço Ω

Proposição 1

Se $\overline{A}$ é o acontecimento contrário de A tem-se que $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Pela definição de acontecimentos contrários tem-se: $A \cup \overline{A} = \Omega$

$$P(\overline{A} \cup A) = P(\Omega) = 1$$

Por outro lado, como $A \cap \overline{A} = \varnothing$ pelo axioma 3 podemos afirmar que

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Então $P(\overline{A}) + P(A) = 1 \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Tarefa 23

Lançam-se dois dados equilibrados e somam-se os pontos apresentados nas faces viradas para cima. O jogador ganha se a soma dos pontos é múltiplo de 3. Qual é a probabilidade de ganhar?

Proposição 2

O acontecimento impossível tem probabilidade zero.

$$P(\varnothing) = 0$$

O axioma 1 afirma que $P(\Omega) = 1$

Como o acontecimento ø é o contrário de Ω temos que :

$$P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

Proposição 3

$0 \le P(A) \le 1$

Como $P(\overline{A}) \ge 0$ pelo axioma 2 e $P(\overline{A}) + P(A) = 1$

Tem que se verificar $P(A) \le 1$

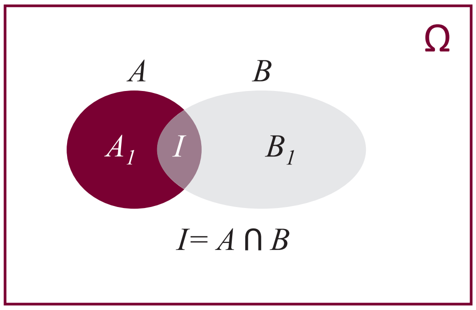
Conjugando o axioma 2 com o corolário 2, podemos afirmar:

$$0 \le P(A) \le 1 \quad , \forall A$$

Proposição 4

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Observando o seguinte diagrama de Venn podemos estabelecer algumas relações.



$$P(A) = P(A_1) + P(I)$$
$$P(B) = P(B_1) + P(I)$$

Então $P(A) + P(B) = \underbrace{P(A_1) + P(I) + P(B_1)}_{P(A \cup B)} + P(I)$

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

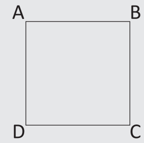
Probabilidade Condicionada

Considera a seguinte experiência: tirar sucessivamente duas bolas sem reposição. Um saco contém 4 bolas brancas e 4 bolas pretas. Qual é a probabilidade da segunda bola ser preta sabendo que a primeira foi branca?

Sabendo que a primeira bola é branca, dentro do saco estão todas as bolas pretas. A probabilidade de sair preta na segunda extração é o quociente entre os casos favoráveis (4 bolas pretas) e os possíveis (7 bolas que há nesse momento no saco) ou seja $\frac{4}{7}$.

Tarefa 24

A figura representa um quadrado.



Determina a probabilidade de:

a) Escolhidos dois vértices ao acaso, eles definirem uma diagonal.

b) Escolhidos três vértices ao acaso eles definirem um triângulo.

Tarefa 25

Um saco tem cinco bolas, indistinguíveis ao tato, sendo três vermelhas e duas pretas.

a) Extraem-se sucessivamente três bolas. Determina a probabilidade de retirar duas bolas pretas se:

a1) A extração é feita sem reposição.

a2) A extração é feita com reposição.

b) Considera a experiência aleatória que consiste em extrair do saco três bolas, sem reposição. Determina a probabilidade de:

b1) Retirar três bolas vermelhas

b2) Retirar dos bolas vermelhas e uma preta.

Tarefa 26

Uma urna contém 6 bolas numeradas: 3 vermelhas, respetivamente com os números 1,3 e 5 e três pretas com, respetivamente, os números 2, 4 e 6.

Tiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da urna para formar um número: a primeira bola é o algarismo das unidades e a segunda o algarismo das dezenas.

a) Efetuando todas as extrações possíveis quantos números diferentes podemos escrever?

b) Qual é a probabilidade do número ser formado por bolas de cores diferentes?

c) Qual é a probabilidade do número ser divisível por três, sabendo que é par?

Tarefa 27

Se $P(\overline{A})=\frac{2}{3}$ e $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$

Determina P (B) de modo a que A e B sejam independentes.

O resultado desta experiência tem a ver com o conceito de probabilidade condicionada.

Dados dois acontecimentos A e B de um espaço amostral Ω, com $P(B)\neq 0$, definimos probabilidade condicionada de A sabendo que acontece B, ao quociente

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(B)\neq 0$$

Exemplo:

1. No lançamento de um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6, determina a probabilidade de sair a face numerada com o 1 sabendo que saiu um número ímpar.

Temos os seguintes acontecimentos

A: "sair a face com o 1"

B: "sair face com um número ímpar"

$\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$ $A=\{1\}$ $B=\{1;3;5\}$ $A\cap B=\{1\}$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$$

Acontecimentos Independentes

Num espaço amostral Ω, consideramos dois acontecimentos A e B, tais que $P(A)\neq 0$ e $P(B)\neq 0$.

Diz-se que o acontecimento A é independente do acontecimento B se $P(A/B)=P(A)$ ou $P(B/A)=P(B)$.

Proposição

Sendo A e B dois acontecimentos independentes tem-se que:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

Exemplo:

Num estudo para determinar a dependência do daltonismo em relação ao género, foram observadas 1000 pessoas tendo-se obtido os resultados registados na seguinte tabela:

	Mulheres	Homens	Totais
Daltónicos	6	31	37
Normal	514	449	963
Totais	520	480	1000

Escolhemos uma pessoa ao acaso das 1000 e consideramos os seguintes acontecimentos:

M: "A pessoa é do sexo feminino"

H: "A pessoa é do sexo masculino"

D: "A pessoa é daltónica"

a) Qual é a probabilidade de ser daltónica sabendo que é mulher?

$$P(D/M)=\frac{P(D\cap M)}{P(M)}=\frac{\frac{6}{1000}}{\frac{520}{1000}}=\frac{3}{260}$$

b) Qual é a probabilidade de ser daltónico sabendo que não é mulher?

$$P(D/\overline{M})=\frac{P(D\cap \overline{M})}{P(\overline{M})}=\frac{\frac{31}{1000}}{\frac{480}{1000}}=\frac{31}{480}$$

c) Os acontecimentos ser mulher e ser daltónico são independentes?

Queremos averiguar se: $P(M\cap D)=P(M)\times P(D)$

$$P(M\cap D)=\frac{6}{1000}$$

$$P(M)=\frac{520}{1000}$$

$$P(D)=\frac{37}{1000}$$

$$P(M\cap D)\neq P(M)\times P(D)$$

Os acontecimentos não são independentes.

Tarefa 28

Numa linha de produção de sapatos, 8% tem defeito. Os empregados do controlo de qualidade retiram 98% dos sapatos defeituosos mas também retiram 1% de sapatos bons.

a) Escolhido um sapato ao acaso, qual é a probabilidade de que tenha defeito e não tenha sido retirado?

b) Se um sapato foi retirado, qual é a probabilidade de que tenha defeito?

Tarefa 29

Numa fábrica de componentes de telemóveis, existem três máquinas, A, B e C, as quais produzem: 15% máquina A, 25% máquina B e 60% máquina C, da produção total.

A % de componentes defeituosos fabricados pelas máquinas A, B e C respetivamente são: 5%, 7%, 4%.

Escolhendo ao acaso um dos componentes produzidos pelas três máquinas e verificando que é defeituoso, qual é a probabilidade de ter sido elaborado pela máquina B?